上級計量経済学 2011 年度　練習問題　解答例

吉村有博[*]　岩倉相雄[†]　柳貴英[‡]

平成 24 年 1 月 26 日

1

R のプログラム例を載せる。出力結果は各自で確認されたい。

```
data<-read.csv("Problem_set_data2011.csv") #データ読込#
attach(data) #変数名取得#
#1) OLS #
ols1<-lm(Y1~X-1) #"-1"は定数項を含めないことを意味#
summary(ols1) #推定結果の表示#
#2) OLS #
ols2<-lm(Y2~X-1); summary(ols2)
#3) 2SLS #
tsls1<-tsls(Y1~X-1,~Z-1) #package"sem"が必要#
tsls2<-tsls(Y2~X-1,~Z-1)
summary(tsls1); summary(tsls2) #推定結果の表示#
#4) Wu-Hausman test #
hausman.systemfit(tsls1,ols1) #package"systemfit"が必要#
hausman.systemfit(tsls2,ols2)
```

1.1

β_1 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_1 = 2.001$。

1.2

β_2 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_2 = 2.527$。

1.3

β_1 の IV 推定値 $\hat{\beta}_1^{IV} = 1.954$。$\beta_2$ の IV 推定値 $\hat{\beta}_2^{IV} = 2.013$。

[*]京都大学大学院経済学研究科 博士課程 1 年 yoshimura.a@hy2.ecs.kyoto-u.ac.jp
[†]京都大学大学院経済学研究科 博士課程 1 年 pollywantsacracker0808@yahoo.co.jp
[‡]京都大学大学院経済学研究科 修士課程 2 年 tkhd.yanagi@gmail.com

1.4

内生性の有無を調べるために Wu-Hausman 検定を行う。1) のモデルにおいて，Wu-Hausman 検定統計量の値は 0.7166 であり，その p 値は 0.3972 であるため帰無仮説 $H_0 : E(\epsilon_{1i}x_i) = 0$ を棄却することができない。2) のモデルにおいては，Wu-Hausman 検定統計量の値は 24.2174 であり，その p 値は 8.605×10^{-7} とかなり 0 に近い値であるため帰無仮説 $H_0 : E(\epsilon_{2i}x_i) = 0$ を棄却する。

2 IV

2.1

講義ノートの Theorem 1 参照。

2.2

講義ノートの Theorem 1 参照。

2.3

σ^2 を

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i' b_{IV})^2 \tag{1}$$

で推定することを考え、この推定量の一致性を示す。

$$y_i - x_i' b_{IV} = \epsilon_i - x_i'(b_{IV} - \beta) \tag{2}$$

という表現から

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2 + 2(b_{IV} - \beta)'\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}x_i\epsilon_i + (b_{IV} - \beta)'\left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}x_i x_i'\right)(b_{IV} - \beta) \tag{3}$$

と書ける。$\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ と $b_{IV} - \beta \xrightarrow{p} 0$ と $\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}x_i\epsilon_i \xrightarrow{p} 0$ と $\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}x_i x_i' \xrightarrow{p} Ex_1x_1'$ という結果と確率収束に対する連続写像定理から、

$$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2 \tag{4}$$

が従う。

2.4

追加的な仮定なしに一致性は成立する。というのは、一致性の証明には、$Var[\epsilon_i|z_i] = \sigma^2$ の仮定は不要だからである。

漸近正規性も成立するが、漸近分散の形は異なり、

$$(\mathbb{E}z_1x_1')^{-1}\mathbb{E}\epsilon^2 z_1 z_1'(\mathbb{E}z_1x_1')^{-1} \tag{5}$$

となる。ここで、$(\mathbb{E}\epsilon^2 z_1 z_1')^{-1}$ の存在は仮定する。

3 AR(2)

2) 以降は安定性条件を仮定する。

3.1

安定性条件を満たすための条件は、特性方程式

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0 \tag{6}$$

が単位円外に根を持つことである。これは、

$$z^2 - \phi_1 z - \phi_2 = 0 \tag{7}$$

の根が単位円内にあることと同等である。$f(z) := z^2 - \phi_1 z - \phi_2$ とおく。以下、$f(z) = 0$ が実数解を持つ場合と虚数解を持つ場合に分けて定常性の条件について調べていく。
(i) 実解の場合 ($D = \phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$)
$f(-1) > 0$、すなわち、$\phi_2 - \phi_1 < 1$
$f(1) > 0$、すなわち、$\phi_2 + \phi_1 < 1$
(ii) 虚数解の場合 ($D = \phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$)
z_1 と z_2 を解とすると、$| z_1 |^2 = z_1 \overline{z_1} = z_1 z_2 = \overline{z_2} z_2 = | z_2 |^2$ なので、$z_1 z_2 < 1$、すなわち、$\phi_2 < -1$ であればよい。

以上 (i) と (ii) により $\phi_2 - \phi_1 < 1$ と $\phi_2 + \phi_1 < 1$ と $\phi_2 > -1$ の条件を満たす領域が定常性の範囲である。グラフは Hamilton (1996, p17) を参照してほしい。

3.2

y_t の期待値は、講義ノートの proposition 1. を用いれば即座に 0 と分かる。直接的に以下のように計算することもできる。まず、AR(2) equation の両辺の期待値をとり

$$\mathbb{E} y_t = \phi_1 \mathbb{E} y_{t-1} + \phi_2 \mathbb{E} y_{t-2} \tag{8}$$

を得る。定常性から、$\mathbb{E} y_t$ は t に関わらず constant だから、

$$(1 - \phi_1 - \phi_2) \mathbb{E} y_1 = 0 \tag{9}$$

定常性の仮定から、$1 - \phi_1 z_1 - \phi_2 z_2^2$ は単位円外にしか根を持たないので、$1 - \phi_1 - \phi_2 \neq 0$ である。したがって、$\mathbb{E} y_t = 0$ でなければならない。

3.3

講義ノート p23 の p 次の Yule=Walker 方程式を P=2 に specialize すればよい。

3.4

AR(2) equation

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t \tag{10}$$

の両辺に y_{t-j} $(j = 1, 2, \cdots)$ をかけ期待値をとると、

$$\gamma(j) = \phi_1 \gamma(j-1) + \phi_2 \gamma(j-2), j = 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

を得る。これの両辺を $\gamma(0)$ で割り、

$$\rho(j) = \phi_1 \rho(j-1) + \phi_2 \rho(j-2), j = 1, 2, \cdots. \tag{12}$$

を得る。特に、

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2\rho(1) \ \Leftrightarrow \ \rho_1 = \phi_1/(1-\phi_2) \tag{13}$$

$$\rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2 \tag{14}$$

を得る。また、(10) に y_t をかけて期待値をとり、

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 \tag{15}$$

となるが、これは

$$\gamma(0) = \phi_1\rho(1)\gamma(0) + \phi_2\rho(2)\gamma(0) + \sigma^2 \tag{16}$$

と書ける。従って、(13) と (14) から、

$$\gamma(0) = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2]} \tag{17}$$

を得る。(11) で $j = 1$ とし、

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) \tag{18}$$

を得るが、これに (17) を代入して解けば、

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1}{(1-\phi_2)}\gamma(0) = \frac{\phi_1\sigma^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2]} \tag{19}$$

となることが分かる。同様の議論を繰り返せば、γ_2 と γ_3 も得られる。

3.5

MA(∞) 表現を導出する方法としては、(i)$(1-\phi_1 z - \phi_2 z^2)^{-1}$ のべき級数展開[1]を行うものと、(ii) 差分方程式を用いるものとがある。ここでは、差分方程式を使った計算方法で考える。講義ノートの p.14 の議論から、MA(∞) 表現の係数 a_t は、

$$a_{t+2} - \phi_1 a_{t+1} - \phi_2 a_t = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{Z}^+ \tag{20}$$

という差分方程式を満たし、かつ、初期条件は、$a_0 = 1,\ a_1 = \phi_1$ である。ここでは、$z^2 - \phi_1 z - \phi_2 = 0$ が二つの異なる実根を持つ場合を考える（実数の重根の場合や実数根を持たない場合も同様に議論すればよい）。差分方程式の解法の一般論から、一般解は、

$$a_t = B_1 m_1^t + B_2 m_2^t \ \ A, B \in \mathbb{R} \tag{21}$$

where $m_{1,2} := (1/2)(\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})$.　ここで、$m_{1,2}$ は $z^2 - \phi_1 z - \phi_2 = 0$ の異なる根であり、安定性条件から 1 より小さい。初期条件から、$B_{1,2}$ は、$B_1 + B_2 = 1$ と $\phi_1 = B_1 m_1 + B_2 m_2$ を満たすように決まるので、$B_{1,2} = (1/2)(1 \pm \phi_1/\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})$ となる。$|a_t| < Ab^t$ となる A と b は、次のように決めればよい。まず、$m_{1,2}$ は安定性条件から 1 より小さいので、アルキメデスの公理から、$|m_{1,2}| < b < 1$ となる b が存在する。また、$A := 2max_{i=1,2}|B_i|$ とすれば、

$$|a_t| = |B_1 m_1^t + B_2 m_2^t| \le |B_1 + B_2| b^t \le Ab^t \tag{22}$$

となる。

[1]安定性条件から、$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$ の根は 1 より大きい。また、$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$ の根は多くて二つであり、有限個である。従って、ある $\epsilon > 0$ が存在し、$|z| < 1 + \epsilon$ となる z に対しては $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 \neq 0$ であり、$(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2)^{-1}$ は解析関数である。解析関数の一般論から、$(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2)^{-1}$ は負べきの係数が 0 の級数展開を行うことができる。この級数の係数が MA(∞) 表現の係数となる。係数はいわゆるコーシーの積分表示の公式から計算できる。

3.6

ϕ_1 と ϕ_2 に対する OLS 推定量の漸近分散は共に、$\frac{\sigma^2\gamma_0}{\gamma_0^2-\gamma_1^2}$ で与えられ、これは (19) により

$$\frac{\sigma^2\gamma_0}{\gamma_0^2-\gamma_1^2} = (1+\phi_1)(1+\phi_1-\phi_2) \tag{23}$$

となる。

3.7

与えられたデータを使い OLS で ϕ_1 と ϕ_2 と σ^2 を推定することを考える。$\hat{\beta} := (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)'$ を $(\phi_1, \phi_2)'$ の OLS 推定量とすると、

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} &= \left\{ \sum_{t=3}^{100} \begin{pmatrix} y_{t-1}^2 & y_{t-1}y_{t-2} \\ y_{t-1}y_{t-2} & y_{t-2}^2 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \sum_{t=3}^{100} \begin{pmatrix} y_{t-1}y_t \\ y_{t-2}y_t \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

となる。$\hat{\sigma}^2$ を σ^2 の OLS 推定量とし、また、$x_t = (y_{t-1}, y_{t-2})'$ と定義すれば、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{100} \sum_{t=3}^{100} (y_t - \hat{\beta}' x_t)^2 \\ &= \frac{1}{100} \sum_{t=3}^{100} y_t^2 + \frac{2}{100} \sum_{t=3}^{100} y_t x_t' \hat{\beta} + \hat{\beta}' \left(\frac{1}{100} \sum_{t=3}^{100} x_t x_t' \right) \hat{\beta} \\ &\cong \frac{16}{9} \end{aligned} \tag{25}$$

となる。

3.8

$|t| = |-5/6| < 2.3$ より $\phi_1 = 0$ の帰無仮説は棄却されない。

4 MA(1)

4.1

単純な計算により、$\gamma_0 = (1+\theta^2)\sigma^2$、$\gamma_1 = \gamma_{-1} = \theta\sigma^2$、$\gamma_j = 0 \quad j = 2, 3, \cdots$ であることが分かる。

4.2

反転可能性の条件は $1 - \theta z = 0$ の根が単位円外にあることであり、それは、$|\theta| < 1$ と同等である。一方、上で見た γ_0 と γ_1 の表現から、

$$\rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2} \tag{26}$$

を得る。これを反転可能性の条件を加味して θ について解くと、

$$\theta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho_0^2}}{2\rho_0} \tag{27}$$

を得る。

4.3

$\hat{\phi}$ は、

$$\hat{\phi} = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}y_t}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} \tag{28}$$

である。分母は γ_1 に確率収束し、分子は γ_0 に確率収束することは簡単に分かる。従って、確率収束に対する連続写像定理から

$$\hat{\phi} \xrightarrow{p} \rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2} \tag{29}$$

となる。

4.4

$\sqrt{T}\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})$ と表現でき、$\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ は線形過程であるから、講義ノート Theorem 17 より、

$$\sqrt{T}\bar{y} \xrightarrow{d} N(0, (1+\theta)^2\sigma^2) \tag{30}$$

4.5

本問と次の問では、ϵ_t の 4 次のモーメントの存在を仮定してそれを σ_4 と書く。まず、$\hat{\gamma}_0$ を ϵ_t で書き表して、マルチンゲール差分となる項を出すために、項を括りなおす。

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_0 =& \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}(\epsilon_t^2 + 2\theta\epsilon_t\epsilon_{t-1} + \theta^2\epsilon_{t-1}^2)\\ =& \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T-1}((1+\theta^2)\epsilon_t^2 + 2\theta\epsilon_t\epsilon_{t-1}) + \frac{1}{T}(\epsilon_1^2 + \epsilon_T^2 + \epsilon_T\epsilon_{T-1})\end{aligned} \tag{31}$$

ここで、右辺第 1 項については、

$$E((1+\theta^2)\epsilon_t^2 + 2\theta\epsilon_t\epsilon_{t-1}|\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, ..., \epsilon_1) = (1+\theta^2)\sigma^2 \equiv \gamma_0 \tag{32}$$

である。よって、この左辺の条件付期待値の中の項から右辺を引いたもの $\{(1+\theta^2)\epsilon_t^2 + 2\theta\epsilon_t\epsilon_{t-1} - \gamma_0\}$ はエルゴード強定常でありまたマルチンゲール差分である。従って、$\hat{\gamma}_0$ から γ_0 を引いて $\sqrt{T}$ をかけるという標準化と、マルチンゲール差分 CLT より、

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0) =& \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=2}^{T}\{y_t^2 - (1+\theta^2)\sigma^2\}\\ =& \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=2}^{T-1}\{(1+\theta^2)\epsilon_t^2 + 2\theta\epsilon_t\epsilon_{t-1}) - (1+\theta^2)\sigma^2\} + \frac{1}{\sqrt{T}}(\epsilon_1^2 + \epsilon_T^2 + \epsilon_T\epsilon_{T-1})\\ \xrightarrow{d}& N(0, V)\\ \text{where} \quad & V \equiv E[(1+\theta^2)\epsilon_t^2 + 2\theta\epsilon_t\epsilon_{t-1} - (1+\theta^2)\sigma^2]^2\end{aligned} \tag{33}$$

を得る。ここで第二項は $o_p(1)$ であるから漸近的には無視できる。この漸近分散 V は単純な計算により、$V = (1+\theta^2)^2\sigma_4 + (\theta^2-1)^2\sigma^4$ となる。

4.6

$\sqrt{T}(\hat{\gamma}_1-\gamma_1)$ という標準化をして考える。次のように展開する：

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\gamma}_1-\gamma_1) &= \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=3}^{T}\{(\epsilon_t-\theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1}-\theta\epsilon_{t-2})-\theta\sigma^2\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=3}^{T}(\epsilon_t\epsilon_{t-1}-\theta\epsilon_{t-1}^2-\theta\epsilon_t\epsilon_{t-2}+\theta^2\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}-\theta\sigma^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=4}^{T}\{(1+\theta^2)\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}-\theta\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-3}-\theta(\epsilon_{t-1}^2-\sigma^2)\} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{T}}\{\epsilon_t\epsilon_{t-1}+\theta^2\epsilon_2\epsilon_1-\theta\epsilon_T\epsilon_{T-2}-\theta(\epsilon_2^2-\sigma^2)\}\end{aligned} \tag{34}$$

ここで第二項は $o_p(1)$ であるから漸近的には無視できる。第一項は和の中が、明らかにエルゴード強定常であり、またマルチンゲール差分である。従って、マルチンゲール差分 CLT から

$$\sqrt{T}(\hat{\gamma}_1-\gamma_1) \quad \xrightarrow{d} N(0,(1+\theta^2)^2\sigma^4+\theta^2\sigma_4) \tag{35}$$

を得る。

5 ARMA(1,1)

5.1

講義ノートの Theorem 22 を参照。

5.2

ϕ_{IV} を ϕ の操作変数推定量とすると、

$$\phi_{IV}=\left(\frac{1}{100}\sum_{t=3}^{100}y_{t-2}y_{t-1}\right)^{-1}\left(\frac{1}{100}\sum_{t=3}^{100}y_{t-2}y_t\right)\cong\frac{3}{4} \tag{36}$$

6 GMM

6.1

モーメント条件を求める。仮定 $E(\epsilon_i|z_i)=0$ より、$E(\epsilon_i z_i)=E(E(\epsilon_i|z_i)z_i)=0$ が従う。従って、モーメント条件は $\epsilon_i\equiv y_i-x_i'\beta_0$ から、

$$E(z_i(y_i-x_i'\beta_0))=0. \tag{37}$$

これのサンプルアナログをとると、

$$0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i(y_i-x_i'\tilde{\beta})=\frac{1}{n}(Z'Y-Z'X\tilde{\beta}). \tag{38}$$

効率的な GMM 推定のためには、加重行列 $\hat{W}$ に $E(\epsilon_i^2 z_i z_i')$ の一致推定量を代入すればよいことは、講義ノート参照。条件付均一分散 (conditional homoskeddasticity) の仮定 $V(\epsilon_i|z_i)=\sigma^2$ より、$S\equiv E(\epsilon_i^2 z_i z_i')=E(E(\epsilon_i^2|z_i)z_i z_i')=\sigma^2E(z_i z_i')$ である。この S の一致推定量は、σ^2 のある一致推定量 $\hat{\sigma^2}$ を用いた

$$\hat{\sigma^2}\frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n}z_i z_i'=\hat{\sigma^2}\frac{1}{n}Z'Z \tag{39}$$

を使えばよい。以上から、効率的 GMM のための目的関数は、

$$J(\tilde{\beta}) = n\frac{n}{\hat{\sigma^2}}\{\frac{1}{n}(Z'Y - Z'X\tilde{\beta})\}'(Z'Z)^{-1}\{\frac{1}{n}(Z'Y - Z'X\tilde{\beta})\}$$
$$= \frac{1}{\hat{\sigma^2}}\{(Z'Y - Z'X\tilde{\beta})\}'(Z'Z)^{-1}\{(Z'Y - Z'X\tilde{\beta})\}. \tag{40}$$

なお、後の J 検定のために、目的関数の中には n がかかっていることに注意。

GMM 推定量を導出するには、等式制約の下での最適化の一階の条件を求めればよい。単純な、$\tilde{\beta}$ によるベクトル微分の操作を経て、一階の条件は以下のようになる。

$$X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X\tilde{\beta} = X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y. \tag{41}$$

これより、効率的 GMM 推定量[2]は、

$$\hat{\beta}_{GMM} = (X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y. \tag{42}$$

この推定量の漸近的性質を求める。なお、逆行列が必要な行列についてはすべて、逆行列が存在することを仮定する。まず、モデルを行列表記として $Y = X\beta_0 + \epsilon$ と書けることを確認する。また、sampling error は

$$\hat{\beta}_{GMM} - \beta_0 = (\frac{1}{n}X'Z(\frac{1}{n}Z'Z)^{-1}\frac{1}{n}Z'X)^{-1}\frac{1}{n}X'Z(\frac{1}{n}Z'Z)^{-1}\frac{1}{n}Z'\epsilon \tag{43}$$

と書ける。今、仮定よりこれら観測値は iid なので、対数の弱法則、連続写像定理、$E(z_i\epsilon_i) = 0$ より、

$$\hat{\beta}_{GMM} - \beta_0 \xrightarrow{p} [E(x_iz_i')E(z_iz_i')^{-1}E(z_ix_i)]^{-1}E(x_iz_i')E(z_iz_i')^{-1}E(z_i\epsilon_i) = 0 \tag{44}$$

となり、一致性を持つ。漸近正規性についても同様に、

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{GMM} - \beta_0) = (\frac{1}{n}X'Z(\frac{1}{n}Z'Z)^{-1}\frac{1}{n}Z'X)^{-1}\frac{1}{n}X'Z(\frac{1}{n}Z'Z)^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}Z'\epsilon \tag{45}$$

と書ける。ここで、Lindeberg-Levy 中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}Z'\epsilon \xrightarrow{d} N(0, S) \quad \text{where} \quad S \equiv E(\epsilon_i z_i z_i') = \sigma^2 E(z_i z_i') \tag{46}$$

であるから、再び連続写像定理を使うことにより、

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{GMM} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0, \mathrm{Avar}(\hat{\beta}_{GMM}))$$
$$\text{where} \quad \mathrm{Avar}(\hat{\beta}_{GMM}) \equiv \sigma^2[E(x_iz_i')E(z_iz_i')^{-1}E(z_ix_i)]^{-1} \tag{47}$$

となる。また、この推定量は効率的でもあることは、この漸近分散 $\sigma^2[E(x_iz_i')E(z_iz_i')^{-1}E(z_ix_i)]^{-1}$ が、講義ノート p.20 における漸近分散の下限の行列 $(G'S^{-1}G)^{-1}$ に対応していることを確かめれば十分。σ^2 の推定量は、既に上で示した。一致性については、Hayashi (2000) p.210 参照。

6.2

小問 1 で導出した GMM 推定量にデータの値を代入するだけ。まず推定値を計算しやすい以下のような形に書き換える。

$$\hat{\beta}_{GMM} = \{(\frac{1}{100}X'Z)(\frac{1}{100}Z'Z)^{-1}(\frac{1}{100}Z'X)\}^{-1}(\frac{1}{100}X'Z)(\frac{1}{100}Z'Z)^{-1}(\frac{1}{100}Z'Y). \tag{48}$$

また、データは

$$\frac{1}{100}X'Z = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_iz_i' = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix},$$
$$\frac{1}{100}Z'Z = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}z_iz_i' = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

のように読んでいけば、計算が簡単である。他の部分も同様に読んでいくことで全て代入すれば、$\hat{\beta}_{GMM} = \frac{1}{2}$ を得る。

[2] このように条件付均一分散の仮定の下では、効率的 GMM 推定量はいわゆる two stage least square (2SLS) 推定量になることを、Hayashi (2000) p.226 等で確認してほしい。

6.3

これも、小問 1 で導出した誤差項の分散の推定量 $\hat{\sigma^2}$ にデータを小問 2 のような方法で代入していく。推定量を、以下のように書き換えながら代入して、

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma^2} =& \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(y_i - x_i'\hat{\beta}_{GMM})^2 \\
=& \frac{1}{100}(Y - X\hat{\beta}_{GMM})'(Y - X\hat{\beta}_{GMM}) \\
=& (\frac{1}{100}Y'Y) - 2\hat{\beta}_{GMM}(\frac{1}{100}Y'X) + \hat{\beta}_{GMM}^2(\frac{1}{100}X'X) \\
=& \frac{15}{4}. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

6.4

この問題で考えるパラメータはスカラーより、t 検定を考えればよい。t 検定のために必要な推定量の標本標準誤差は、小問 1 で導出した $\hat{\beta}_{GMM}$ の漸近分散の一致推定量を用いればよい。つまり、$H_0 : \beta = 0$ についての検定統計量は、

$$
t = \frac{\hat{\beta}_{GMM} - 0}{SE} \quad \text{where} \quad SE = \sqrt{\frac{\hat{\sigma^2}}{n}(X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}} \qquad (50)
$$

で与えられる。前問までと同様の方法で代入していくと、$t = \sqrt{\frac{20000}{5}} = 63.24 > 1.96$ となり、$\hat{\beta}_{GMM}$ は有意水準 5 %で有意である。

6.5

J 検定を行う。検定仮説は、

$$
\begin{aligned}
H_0 :& E(z_i(y_i - x_i'\beta_0)) = 0 \qquad (51) \\
H_1 :& E(z_i(y_i - x_i'\beta_0)) = \delta(\neq 0) \qquad (52)
\end{aligned}
$$

講義ノート (Theorem 14) より、小問 1 において導出した目的関数値 J は、H_0 の下で $J \xrightarrow{p} \chi_1^2$ である。J 値を計算すると、$J = 4.44 > 3.84$ となり、有意水準 5 %でモーメント条件は正しい。（正確には、H_0 を受容する）ただし、3.84 は自由度 1 のカイ自乗分布の片側 5 %点である。

6.6

操作変数として z_{1i} のみを用いる場合、モーメント条件は

$$
E(z_{1i}(y_i - x_i'\beta_0)) = 0 \qquad (53)
$$

のみとなる。この時、GMM 推定量は IV 推定量になることに注意して、目的関数は

$$
J(\tilde{\beta}) = n\{\frac{1}{n}(Z_1'Y - Z_1'X\tilde{\beta})\}'\{\frac{1}{n}(Z_1'Y - Z_1'X\tilde{\beta})\} \qquad (54)
$$

となる。これの一階の条件から以下のように IV 推定量が導出できて、いままでのようにデータを代入して、

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{IV} =& (X'Z_1Z_1'X)^{-1}X'Z_1Z_1'Y \\
=& (Z_1'X)^{-1}Z_1'Y \\
=& (\frac{1}{100}Z_1'X)^{-1}(\frac{1}{100}Z_1'Y) \\
=& 1. \qquad (55)
\end{aligned}
$$

6.7

本問は、より多くの操作変数を用いた推定量の方が、効率性が高まることを見るものである。二つの推定量の効率性を比較するために、それぞれの漸近分散の大小を比較すればよい。ここでは、操作変数 z_{1i} のみを用いたものを IV 推定量、操作変数を両方用いたものを GMM 推定量と便宜的に呼ぶことにする。まず notation を次のように用意する。

$$E(x_i z_i) \equiv \begin{bmatrix} E(z_{1i}) \\ E(z_{2i}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{z1x} \\ \sigma_{z2x} \end{bmatrix}, \quad E(z_i z_i') \equiv \begin{bmatrix} E(z_{1i}^2) & E(z_{1i}z_{2i}) \\ E(z_{2i}z_{1i}) & E(z_{2i}^2) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}. \tag{56}$$

まず IV 推定量の漸近分散は、

$$\begin{aligned} \mathrm{Avar}(\hat{\beta}_{IV}) =& \sigma^2 E(z_{1i}x_i)^{-1} E(z_{1i}z_{1i}) E(z_{1i}x_i)^{-1} \\ =& \sigma^2 \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{z1x}^2}. \end{aligned} \tag{57}$$

一方 GMM 推定量の漸近分散は小問 1 より、

$$\begin{aligned} \mathrm{Avar}(\hat{\beta}_{GMM}) =& \sigma^2 [E(x_i z_i') E(z_i z_i')^{-1} E(z_i x_i)]^{-1} \\ =& \sigma^2 \left[\begin{bmatrix} \sigma_{z1x} & \sigma_{z2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{z1x} \\ \sigma_{z2x} \end{bmatrix} \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{58}$$

GMM 推定量の漸近分散の方が小さいことを示すためには、このケースではスカラーとして大小を比較するが、そのためには IV 推定量の漸近分散の一部である $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{z1x}^2}$ という項がある程度きれいに出てきてほしい。そこで、GMM 推定量の漸近分散の中心にある逆行列については、分割行列の逆行列の公式[3]を用いて次のように書く。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} + \sigma_{11}^{-1}\sigma_{12}F_2\sigma_{21}\sigma_{11}^{-1} & -\sigma_{11}^{-1}\sigma_{12}F_2 \\ -F_2\sigma_{21}\sigma_{11}^{-1} & F_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \\ \text{where} \quad & F_2 \equiv (\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}\sigma_{12})^{-1} = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}} \end{aligned} \tag{59}$$

これを使って展開して、

$$\begin{aligned} \mathrm{Avar}(\hat{\beta}_{GMM}) =& \sigma^2 (\sigma_{z1x}^2 s_{11} + 2\sigma_{z1x}\sigma_{z2x}s_{12} + \sigma_{z2x}^2 s_{22})^{-1} \\ =& \sigma^2 (\sigma_{z1x}^2 (\sigma_{11}^{-1} + \sigma_{11}^{-1}\sigma_{12}F_2\sigma_{21}\sigma_{11}^{-1}) + 2\sigma_{z1x}\sigma_{z2x}s_{12} + \sigma_{z2x}^2 s_{22})^{-1} \\ =& \sigma^2 \left(\frac{\sigma_{z1x}^2}{\sigma_{11}} + \frac{\sigma_{z1x}^2\sigma_{12}F_2\sigma_{21}}{\sigma_{11}^2} - \frac{2\sigma_{z1x}\sigma_{z2x}F_2}{\sigma_{11}} + \frac{\sigma_{11}\sigma_{z2x}^2F_2}{\sigma_{11}} \right)^{-1} \\ =& \sigma^2 \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{z1x}^2 + A} \\ \text{where} \quad A \equiv& \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} (\sigma_{11}\sigma_{z2x} - \sigma_{12}\sigma_{z1x})^2. \end{aligned} \tag{60}$$

最後に $A \geq 0$ を示せば十分だが、これはコーシーシュワルツの不等式より $\{E(z_{1i}z_{2i})\}^2 \leq E(z_{1i}^2)E(z_{2i}^2)$ から $\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \geq 0$ が従うので、これで GMM 推定量の効率性が示された。

7 GMM-2

例えば最低でも一致性が満たされるように、古典的回帰モデルの仮定を緩めることを考える。この場合講義ノート p.2 と p.18 の仮定を比べて考えればよい。つまりこの時、例えば A1:モデルの線形性や、A3:$E(\epsilon|X) = 0$ (strictly exogeneity) A4:$E(\epsilon'\epsilon|X) = \sigma^2 I$ (conditional homoskedasticity and non-autocorrelation) などを弱めることができる。

[3]Hayashi (2000) p.673 参照

8　GMM-3

$G'S^{-1}G - G'WG(G'WSWG)^{-1}G'WG$ が半正値定符号行列であることを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&G'S^{-1}G - G'WG(G'WSWG)^{-1}G'WG \\
&= G'S^{-1/2}S^{-1/2}G - G'S^{-1/2}S^{1/2}WG(G'WSWG)^{-1}G'WS^{1/2}S^{-1/2}G \\
&= (G'S^{-1/2})(I - S^{1/2}WG(G'WSWG)^{-1}G'WS^{1/2})(S^{-1/2}G) \\
&= (G'S^{-1/2})(I - A(A'A)^{-1}A')(S^{-1/2}G), \qquad A \equiv S^{1/2}WG
\end{aligned}
$$

ここで $I-A(A'A)^{-1}A'$ は対称なべき等行列であるため半正値定符号行列である。よって，$G'S^{-1}G-G'WG(G'WSWG)^{-1}G'WG$ は半正値定符号行列である。